2) La modification de la fonction précédente, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel} \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ et pgcd}(p,q) = 1 \end{cases}$$

est Riemann intégrable, car elle est bornée et son ensemble de points de discontinuité est dénombrable, donc de mesure nulle :

2.114 Exercice Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de g est $]0,1] \cap \mathbb{Q}$.

Une application de ce théorème

2.115 Proposition
Soit $f : [a, b] \to [c, d]$ une fonction Riemann-intégrable et $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $g \circ f$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Démonstration: La fonction g étant continue sur l'intervalle fermé borné $[c,d]$ elle est bornée, il en est alors de même pour $g \circ f$.

Comme g est continue, $g \circ f$ est alors continue en tout point où f est continue, ainsi l'ensemble de discontinuité de $g \circ f$ est contenu dans celui de f, mais, l'ensemble de discontinuité de f est de mesure nulle, puisque $f \in \mathcal{R}([a,b])$, ainsi l'ensemble de discontinuité de $g \circ f$ est de mesure nulle. Alors, d'après le critère de Lebesgue, $g \circ f$ est Riemann-integrable sur $[a,b]$. ∎

3 Intégrales généralisées (impropres)

L'intégrale de Riemann est définie pour des fonctions bornées et sur des segments (intervalles fermés et bornés). On se propose de généraliser cette notion au cas des fonctions bornés ou non bornées définies sur des intervalles qui ne sont pas nécessairement des ségments.

Si maintenant f est Riemann-intégrable sur tout intervalle $[a, c]$ inclus dans $[a, b[$, et si la fonction F définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

possède une limite lorsque x tend vers b par valeurs inférieures, on définit ainsi une nouvelle notion. On peut d'ailleurs envisager aussi le cas où $b = +\infty$.

3.1 Définition
Une fonction f définie sur un intervalle I est dite localement intégrable sur I, si sa restriction à tout ségment inclus dans I est Riemann-intégrable. C'est le cas en particulier si f est continue ou monotone sur I.

On notera par $\mathcal{R}_{loc}(I)$ l'ensemble des fonctions localement intégrables sur I.

3.2 Remarque
Toute fonction f continue ou monotone sur I est localement intégrable sur I.

On se propose d'étudier quand on peut donner un sens à l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Lorsque cela sera possible on parlera alors d'intégrale généralisée.

Nous allons définir maintenant les notions d'intégrale convergente et d'intégrale divergente en envisageant différentes situations.

3.3 DÉFINITION
Soit $I = [a,\ b[$ où $a < b \leq +\infty$. Soit f une fonction localement intégrable sur $I = [a,\ b[$.
On dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) de f sur I **converge** , si la fonction F définie par
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
possède une limite finie lorsque x tend vers b i.e. $\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt$ existe.

Dans ce cas, cette limite est appelée intégrale généralisée de f sur I est notée $\int_a^b f(x)dx$.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ **diverge**.

Lorsque F a une limite (finie ou non) en b on note
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)dt.$$
Avant d'étudier les autres cas faisons quelques remarques sur celui-ci qui seront valables pour tous.

1) L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ diverge si F n'a pas de limite en b, ou a une limite infinie en b. 2) Si f est définie et Riemann-intégrable sur $[a,\ b]$, alors f est localement intégrable sur $[a,\ b[$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge. Les deux notions coincident dans ce cas.

3) Nous dirons que deux intégrales sont de même nature, si elles sont toutes deux divergentes ou toutes deux convergentes.

4) La notion de convergence d'une intégrale généralisée ne dépend que de ce qui se passe près de la borne où l'intervalle est ouvert :

3.4 PROPOSITION
Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable. Alors pour tout $c \in [a, b[$ les intégrales
$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_c^b f(x)dx$$
sont de même nature.

En effet, en raison de la relation de Chasles,
$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt.$$
La limite du membre de droite existe si et seulement si celle du membre de gauche existe. Et l'on a, si les intégrales convergent,
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.\Box$$
5) Si f est continue sur $]a,\ b]$ et si F est une primitive de f, on a
$$\int_a^x f(t)dt \ = F(x) - F(a),$$
il en résulte que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si F possède une limite finie en b.

6) Si f est à valeurs complexes, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge si et seulement si les intégrales $\int_a^b \mathrm{Re} f(x)dx$ et $\int_a^b \mathrm{Im} f(x)dx$ convergent et l'on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Re} f(x)dx + i\int_a^b \mathrm{Im} f(x)dx.$$

7) On a des définitions analogues, pour $I =]a, b]$ où $-\infty \leq a < b < +\infty$
$I =]a, b]$
Soit f une fonction localement intégrable sur $I =]a, b]$. Si la fonction F définie par

$$F(x) = \int_x^b f(t)dt$$

possède une limite finie lorsque x tend vers a par valeurs supérieures, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

8) De même pour $I =]a, b[$ où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Soit f une fonction localement intégrable sur $I =]a,\ b[$. Soit $c \in]a,\ b[$. Si les intégrales $\int_a^c f(x)dx$ et $\int_c^b f(x)dx$ convergent, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ converge. Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

On note

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

lorsque cette somme existe dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

3.5 Remarque
Grâce à la relation de Chasles, ces définitions ne dépendent pas du choix de c.

3.6 Exemple. Par exemple, pour étudier $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(1+x^2)}$, on étudierait les quatre intégrales

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(1+x^2)}, \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(1+x^2)}, \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(1+x^2)}, \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(1+x^2)}.$$

La convergence a lieu si et seulement si les quatre intégrales convergent.

Nous allons nous préoccuper dans la suite de savoir si une intégrale généralisée donnée converge ou non. Comme ce problème revient à savoir si une fonction a une limite finie en en un point, on pourra appliquer les théorèmes classiques sur les limites de fonctions.

3.0.1 Exemples fondamentaux

3.7 Exemple. $f(x) = e^{-x},\ x \in [0, +\infty[$

$F(x) = \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ est convergente et vaut 1.

Une famille importante d'intégrales généralisées est donnée par celle des intégrales de Riemann.

3.8 Exemple (Intégrales de Riemann).
Soient α un réel et $f_\alpha :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$.

1) L'intégrale de f_α sur $[1, +\infty[$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$ et on a :

$$\forall \alpha > 1, \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

2) L'intégrale de f_α sur $]0, 1]$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$ avec :

$$\forall \alpha < 1, \qquad \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Démonstration: 1) Pour $x > 1$ on a :

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1}(x^{-\alpha+1} - 1) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

et en conséquence : $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ existe si, et seulement si, $\alpha > 1$.

2) De même pour $0 < x < 1$ on a : $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ existe si, et seulement si, $\alpha < 1$. ■

3.10 REMARQUE
On pourra noter l'analogie entre les intégrales de Riemann sur $[1, +\infty[$ et les séries de Riemann.

3.11 REMARQUE
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ est divergente quel que soit le réel α.

3.12 REMARQUE
On peut montrer de manière analogue (ou en effectuant le changement de variable $u = b - x$ (resp. $u = x - a$)) que pour $a < b$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \left(\text{resp. } \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} \right)$ est convergente si, et seulement si, $\alpha < 1$ et on a pour tout $\alpha < 1$,

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}}.$$

3.13 EXEMPLE. Soient α un réel et $f_\alpha :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$.

L'intégrale de f_α sur $[2, +\infty[$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$ et

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^\alpha} = \frac{(\ln(2))^{-\alpha+1}}{\alpha - 1}$$

En effet, en effectuant le changement de variable $u = \ln(t)$, on a pour tout $x \in]2, +\infty]$

$$F(x) = \int_2^x \frac{dt}{t(ln(t))^\alpha} = \int_{\ln(2)}^{\ln(x)} \frac{du}{u^\alpha}$$

i.e. $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{-\alpha+1}(\ln(x))^{-\alpha+1} - (\ln(2))^{-\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(2)) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$

Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

3.14 EXEMPLE (INTÉGRALES DE BERTRAND EN $+\infty$). : On définit les *logarithmes logarithmes itérés*, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, $\ln_p$ par :
si $p = 1$, $\ln_1$ est la fonction logarithme ln usuelle; si $p \geq 2$, $\ln_p$ est la fonction $x \mapsto \ln(\ln_{p-1}(x))$ définie sur $]e_p, +\infty[$ où $e_1 = 0$ et $e_p = e^{e_{p-1}}$ pour $p \geq 2$.

Chaque fonction $\ln_p$ est de classe C^∞, strictement croissante sur $]e_p, +\infty[$, de limite $+\infty$ en $+\infty$, et pour $p \geq 2$, la dérivée de $\ln_p$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln_1 x \ldots \ln_{p-1}(x)}$.

Maintenant pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on définit

$f_{p,\alpha} : [e_{p+1}, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{1}{x \ln_1 x \ldots \ln_{p-1} x (\ln_p x)^\alpha}$

dont la primitive $\displaystyle\int_{e_{p+2}}^{X} f_{p,\alpha}(x)\mathrm{d}x = F_{p,\alpha}(X)$ se calcule immédiatement :

$$F_{p,\alpha}(X) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}((\ln_p X)^{1-\alpha} - 1) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln_{p+1}(X) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}.$$

Comme $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln_k(X) = +\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il en résulte que l'intégrale de Bertrand

$$\int_{e_{p+2}}^{+\infty} f_{p,\alpha}(x)\mathrm{d}x \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.$$

3.15 EXEMPLE. Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale, et soit $\lambda > 0$. Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} P(x)dx$. La fonction $x \mapsto e^{-\lambda x} P(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et admet pour primitive $\mathrm{e}^{-\lambda x} Q(x)$, où Q est un nouveau polynôme du même degré que P (plus précisement $Q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{deg(P)} \frac{(-1)^k}{\lambda^k} P^{(k)}(x)$). On a donc pour tout $X \in \mathbb{R}_+$

$$\int_0^X \mathrm{e}^{-\lambda t} P(t)\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-\lambda X} Q(X) - Q(0).$$

Par croissance comparée des puissances et des exponentielles, on a $\lim\limits_{X \to +\infty} e^{-\lambda X} P(X) = 0$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} P(x)dx$ est convergente.

3.0.2 Propriétés des intégrales généralisées

Nous donnerons les démonstrations, et parfois les résultats, uniquement dans le cas des intervalles $[a,\ b[$. Ils se transcrivent sans problèmes dans le cas $]a,\ b]$.

Linéarité des intégrales convergentes

3.16 PROPOSITION
Soit f et g des fonctions localement intégrables sur $I = [a, b[$, λ un nombre réel.

Si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ convergent, alors :

1) $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

2) $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$

Démonstration: En raison de la linéarité de l'intégrale de Riemann, on a

$$\int_a^x (f+g)(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_a^x g(t)dt,$$

et

$$\int_a^x (\lambda f)(t)dt = \lambda \int_a^x f(t)dt,$$

et les théorèmes sur les limites de sommes et produits donnent le résultat. ■

3.18 REMARQUE
On ne peut rien conclure si les deux intégrales divergent.

Changement de variable

3.19 THÉORÈME (CHANGEMENT DE VARIABLE)
Soit $+\infty < \alpha < \beta \leq +\infty$ Soient $\varphi : [\alpha, \beta[\to [a, b[$ une application de classe C^1 telle que $\varphi(\alpha) = a$ et $\lim\limits_{t \to \beta} \varphi(t) = b$. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une application continue.

si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ converge et

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Si on suppose en plus que φ est bijective (c-à-d strictement monotone), alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ sont de même nature.

Démonstration: On désigne respectivement par F et G, les primitives respectivement de f sur $[a, b[$ nulle en a et de $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ sur $[\alpha, \beta[$ nulle en α.
Comme $(F \circ \varphi)' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi' = G'$ et $F \circ \varphi(\alpha) = F(a) = 0 = G(\alpha)$, on déduit que $G = F \circ \varphi$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge équivaut à dire que F a une limite finie en b et avec $\lim\limits_{t \to \beta} \varphi(t) = b$, on déduit que :

$$\lim_{t \to \beta} G(t) = \lim_{t \to \beta} F(\varphi(t)) = \lim_{x \to b} F(x) = \int_a^b f(x)dx$$

ce qui signifie que $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Maintenant si on suppose que φ est de plus bijective, alors φ^{-1} est continue et on a réciproquement si $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ converge, alors G a une limite finie en β et avec $\lim\limits_{x \to b} \varphi^{-1}(x) = \beta$, on déduit que :

$$\lim_{x \to b} F(x) = \lim_{x \to b} G(\varphi^{-1}(x)) = \lim_{t \to \beta} G(t) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

ce qui signifie que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge vers $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. ■

3.21 REMARQUE
Dans la pratique, on effectue le changement de variable sur l'intégrale sur un segment $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ et on passe à la limite ensuite.

Remarquons qu'un changement de variable peut transformer une intégrale généralisée en intégrale de Riemann. Cela montre dans ce cas que l'intégrale généralisée converge.

3.22 EXEMPLE. Soit $f(x) = \dfrac{\arctan x}{x^2}$, définie sur $[1,+\infty[$. Soit $\varphi :]0,1] \to [1,+\infty[$ definie par $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}$.
La fonction φ est bijective et de classe C^1, $\varphi(1) = 1$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = +\infty$.
On a $f(\varphi(t))\varphi'(t) = \arctan \dfrac{1}{t}$, qui se prolonge par continuité en 0 (par la valeur $\frac{\pi}{2}$).
L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \arctan \frac{1}{t}\, dt$ est alors une intégrale de Riemann et donc converge. Il en résulte que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2}\, dx$ converge également.

Intégration par parties

3.23 THÉORÈME (INTÉGRATION PAR PARTIES)
Soient f et g des fonctions de classe C^1 sur $I = [a,b[$.
Si $\lim\limits_{x\to b} f(x)g(x)$ existe, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)dx$ sont de même nature et si elles convergent on a :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \lim_{x\to b} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Démonstration: On a, par la formule d'intégration par parties sur un segment $[a,x] \subset [a,b[$,

$$\int_a^x f(t)g'(t)dt = f(x)g(x) - f(a)g(a) \; - \int_a^x f'(t)g(t)dt,$$

et donc, lorsque x tend vers b, le membre de droite a une limite qui vaut

$$\lim_{x\to b} f(x)g(x) - f(a)g(a) \; - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Cela signifie que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)dx$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)dx$ et dans ce cas on a l'égalité voulue. ∎

3.25 REMARQUE
il se peut que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)g'(x)dx$ converge mais que fg n'ai pas de limite finie et que $\displaystyle\int_a^b f'(x)g(x)dx$ diverge. Dans la pratique on écrira la formule d'intagration par parties dans un ségment avant de passer à la limite.

3.26 EXEMPLE. Soit à calculer

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$$

(on pose, pour $x = 0$, $\dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2} = -1$). On peut écrire, pour $0 < X' < X < 1$, alors la formule d'intégration par parties sur $[X', X]$ donne

$$\int_{X'}^{X} \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx = \left[(1-\frac{1}{x})\ln(1-x^2)\right]_{X'}^{X} - \int_{X'}^{X} (1-\frac{1}{x})\frac{-2x}{1-x^2}dx$$

(Pour que $\lim_{X\to 1^-}(1-\frac{1}{X})\ln(1-X^2)$ existe, l'astuce consiste ici à prendre comme primitive de $\frac{1}{x^2}$ celle qui s'annule en $x=1$, c-à-d $1-\frac{1}{x}$).

On a $\lim_{X\to 1^-}(1-\frac{1}{X})\ln(1-X^2)=0$ et $\lim_{X'\to 0^+}(1-\frac{1}{X})\ln(1-X^2)=0$

Par conséquent, $\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx$ et $\int_0^1 (1-\frac{1}{x})\frac{-2x}{1-x^2}dx$ sont de même nature. On a d'autre part

$$\lim_{\substack{X\to 1\\ X'\to 0}} \int_{X'}^{X} (1-\frac{1}{x})\frac{-2x}{1-x^2}dx = \int_0^1 \frac{-2}{1+x}dx = -2\ln(2).$$

D'où

$$I=\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2}dx = -2\ln(2).$$